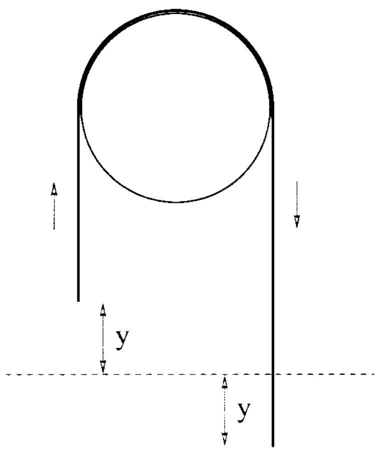
TENTAMEN WISKUNDE 2

8 juni 2000, 14.00-17.00.
Voor iedere opgave kun je maximaal 8/7 punt halen.
Totaal: 8 + 1 (huiswerk) + 1 (gratis) = 10 punten.
Alle antwoorden moet je motiveren. Succes!

1. Een kabel loopt over een wiel (zie figuur). Het rechterstuk beweegt naar beneden. De zwaartekracht is naar beneden gericht. De kabel weegt λ kilogram per meter lengte. De totale lengte van de kabel is L meter. De totale massa van de kabel is gelijk aan $m = \lambda L$ kilogram. De horizontale stippellijn geeft de evenwichtstoestand aan: als zowel het rechter- als het linkeruiteinde van de kabel op deze stippellijn liggen, dan verandert de toestand niet. We beschouwen een kabel die niet in evenwicht is. Op tijdstip t ligt het rechteruiteinde $y(t)$ meter onder de evenwichtslijn, en het linkeruiteinde $y(t)$ meter boven de evenwichtslijn. De versnelling van de kabel is gelijk aan $a = y''(t)$. Volgens Newton is de kracht op de kabel $F = m \cdot a$.



   Als de kabel wrijvingsloos over het wiel loopt, moet de kracht F in evenwicht zijn met de netto zwaartekracht, die gelijk is aan de verplaatste massa $\lambda 2y(t)$ maal de gravitatieversnelling g:
$$F = ma = \lambda L y''(t) = g\lambda 2y(t)$$

   (a) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van de bovenstaande d.v.

   We beschouwen nu een kabel met wrijving. De wrijving wordt gegeven door een constante kracht W. Het krachten-evenwicht luidt nu:
$$F = ma = \lambda L y''(t) = g\lambda 2y(t) - W \tag{1}$$

   (b) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van de d.v. (1).

   (c) Op $t = 0$ geldt $y(0) = y_0$ (waarbij $y_0 \neq 0$) en $y'(0) = 0$.
   Hoe luidt nu de oplossing van d.v. (1)?

2. We beschouwen het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen
$$\begin{aligned} y_1' &= -6y_1 - y_2 \\ y_2' &= -9y_1 - 6y_2 \end{aligned}$$

   (a) Bereken de algemene oplossing van dit stelsel.

   (b) Bepaal het type en de stabiliteit van het kritieke punt van het bovenstaande stelsel differentiaalvergelijkingen.

   (c) Schets enkele trajectoriën in het fase-vlak.

3. We zoeken een oplossing $y(x)$ van de differentiaalvergelijking
$$y''(x) = x - y(x)$$
   in de vorm van een machtreeks:
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$
   De oplossing $y(x)$ moet bovendien voldoen aan de volgende twee beginvoorwaarden: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 1$.

(a) Laat zien dat uit deze beginvoorwaarden volgt dat $a_0 = a_1 = 1$.

(b) Bereken de coëfficiënten a_2 en a_3.

(c) Toon aan dat de coëfficiënten a_n voldoen aan

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)},$$

waarbij $n = 2, 3, 4, \ldots$.

4. De 2π-periodieke functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als} \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{als} \quad \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \end{cases}$$

(a) Schets de grafieken van f en $|f|$.

(b) Waarom zijn de Fourier-cos-coëfficiënten van $|f|$ nul?

(c) Bereken de Fourier-ontwikkeling van f.

5. We willen de divergentie-stelling van Gauß gebruiken om de oppervlakte-integraal

$$\iint_S (x^2 + y + z)\,dA,$$

uit te rekenen, waarbij S het oppervlak van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ is.

(a) Geef in ieder punt (x, y, z) van S de (vanuit de bol gezien naar buiten gerichte) eenheidsnormaal $\mathbf{n}$.

(b) Bepaal een vectorveld $\mathbf{F}$, zo danig dat $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z$.

(c) Toon m.b.v. de divergentie-stelling van Gauß aan dat de bovenstaande oppervlakte-integraal gelijk is aan de inhoud van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

6. De functie $u(x, y)$ voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Is dit een elliptische, parabolische of hyperbolische p.d.v.? (Motiveer!)

(b) We zoeken oplossingen van de bovenstaande p.d.v. van de vorm $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Toon aan dat de functies $X(x)$ en $Y(y)$ voldoen aan

$$X''(x) = kX(x) \qquad Y''(y) = kY(y)$$

waarbij k een constante is.

(c) Bepaal $u(x, y)$.

7. We zoeken een oplossing van de vergelijking

$$x = \cos x \tag{3}$$

waarbij $x > 0$.

(a) Schets de grafieken van x en $\cos x$ in een figuur voor $x \in [0, \pi/2]$ en beredeneer dat er een oplossing x is met $x \in (0, \pi/2)$.

(b) We willen deze oplossing benaderen m.b.v. het iteratie-voorschrift

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

en $x_0 = 1$. Schets x_1 en x_2 in de grafiek van onderdeel (a).

(c) Bereken x_9 en x_{10} m.b.v. het bovenstaande voorschrift.

(d) We kunnen vergelijking (3) ook iteratief oplossen m.b.v. de methode van Newton. Welk iteratie-voorschrift moeten we dan gebruiken?